第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0853-06

# 三维Helmholtz方程的高阶隐式紧致差分方法*

葛永斌[1]， 刘国涛[2]

(1- 宁夏大学应用数学与力学研究所，银川 750021;
2- 中国航天科工集团第六研究院46所，呼和浩特 010010)

**摘 要**: 本文基于二阶导数的四阶Padé型紧致差分逼近式，并结合原方程本身，得到了三维Helmholtz方程的一种四阶精度的隐式紧致差分格式，该格式在每个空间方向上只涉及到三个点处的未知量及其二阶导数值。边界处对于二阶导数的离散格式利用四阶显式偏心格式。然后，利用Richardson外推法、算子插值法及二阶导数在边界点处的六阶显式偏心格式，将本文构造的格式精度提高到六阶。最后，通过数值实验验证了本文方法的精确性和可靠性。

**关键词**: Helmholtz方程；高精度；隐式；紧致差分格式；Richardson外推法

**分类号**: **AMS**(2000) 65N30 **中图分类号**: O241.82 **文献标识码**: A

## 1 引言

Helmholtz方程在许多工程领域都会遇到，如电磁场中的波导问题、薄膜振动问题以及海洋工程中水波衍射问题等都是由Helmholtz方程控制的。Helmholtz方程的数值解法有多种，常见的有有限单元法和有限差分法及其各种迭代方法[1,2]，其中有限单元法应用最为普遍，但是，有限元法的计算精度随着方程波数的增大而急剧降低。而传统的差分方法精度较低，要想得到精确的结果，则必须将网格精细剖分，如此是很不经济的，于是研究者倾向于发展各种高精度的差分方法[3-6]。Manohar和Stephenson[3]提出了二维Hemholtz方程的一种高精度差分格式；Singer和Turkel[4]提出了关于三维Hemholtz方程的一种高精度紧致差分格式；Steij1和Hoeijmakers[5]基于Laplace算子的高阶紧致离散形式，推导得到了三维Helmholtz方程的一种高阶紧致差分格式。王前东等[6]给出了变系数Helmholtz方程的六阶精度校正法，此校正过程几乎不增加工作量，而校正后精度比未校正提高了四阶。

本文采用二阶导数的四阶Padé型紧致差分逼近式，结合原方程本身，得到了三维Helmholtz方程的一种四阶精度的隐式紧致差分格式，该格式在每个空间方向上只涉及到三个点处的未知量及其二阶导数值，边界处对于二阶导数的离散采用文献[7]提出的四阶显式偏心格式。然后基于Richardson外推法、算子插值法及二阶导数在边界点处的六阶显式偏心格式，将本文构造的格式精度整体提高到六阶。

**收稿日期**: 2008-12-31. **作者简介**: 葛永斌(1975年5月生)，男，博士，教授. 研究方向：偏微分方程数值解与计算流体力学.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10502026)；宁夏自然科学基金(NZ0937).

## 2 高阶隐式紧致差分格式

考虑如下的三维Helmholtz方程

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z)+\kappa^2 u(x,y,z)=f(x,y,z), & (x,y,z)\in \mathrm{D}, \\ u(x,y,z)=g(x,y,z), & (x,y,z)\in \partial\mathrm{D}, \end{cases} \tag{1}$$

其中$\Delta$是三维Laplace算子，$D$是求解区域，$\partial D$是区域边界，$\kappa$是为常数。现取计算区域为$[0,l_x]\times[0,l_y]\times[0,l_z]$，每个空间方向取等步长。记

$$h_x=\frac{l_x}{N_x},\quad h_y=\frac{l_y}{N_y},\quad h_z=\frac{l_z}{N_z},$$

$N_x$, $N_y$, $N_z$为网格等分数，且均为偶数，$h_x$, $h_y$, $h_z$分别为$x,y,z$方向的网格步长。

根据二阶导数的四阶Padé型紧致差分格式[7]

$$\frac{1}{12}(u_{xx})_{i+1,j,k}+\frac{5}{6}(u_{xx})_{i,j,k}+\frac{1}{12}(u_{xx})_{i-1,j,k}=\frac{u_{i+1,j,k}-2u_{i,j,k}+u_{i-1,j,k}}{h_x^2}+O(h_x^4), \tag{2}$$

$$\frac{1}{12}(u_{yy})_{i,j+1,k}+\frac{5}{6}(u_{yy})_{i,j,k}+\frac{1}{12}(u_{yy})_{i,j-1,k}=\frac{u_{i,j+1,k}-2u_{i,j,k}+u_{i,j-1,k}}{h_y^2}+O(h_y^4), \tag{3}$$

$$\frac{1}{12}(u_{zz})_{i,j,k+1}+\frac{5}{6}(u_{zz})_{i,j,k}+\frac{1}{12}(u_{zz})_{i,j,k-1}=\frac{u_{i,j,k+1}-2u_{i,j,k}+u_{i,j,k-1}}{h_z^2}+O(h_z^4), \tag{4}$$

以及

$$u_{i,j,k}=u_{i,j,k}. \tag{5}$$

将(2) $\times\frac{6}{5}$ + (3) $\times\frac{6}{5}$ + (4) $\times\frac{6}{5}$ + (5) $\times\kappa^2$，并利用原方程(1)式，略去高阶项后整理可得

$$\begin{aligned} &\frac{6}{5h_x^2}(u_{i+1,j,k}+u_{i-1,j,k})+\frac{6}{5h_y^2}(u_{i,j+1,k}+u_{i,j-1,k}) \\ &+\frac{6}{5h_z^2}(u_{i,j,k+1}+u_{i,j,k-1})+\left(\kappa^2-\frac{12}{5h_x^2}-\frac{12}{5h_y^2}-\frac{12}{5h_z^2}\right)u_{i,j,k} \\ =\ &\frac{1}{10}\big[(u_{xx})_{i+1,j,k}+(u_{xx})_{i-1,j,k}+(u_{yy})_{i,j+1,k}+(u_{yy})_{i,j-1,k} \\ &+(u_{zz})_{i,j,k+1}+(u_{zz})_{i,j,k-1}\big]+f_{i,j,k}. \end{aligned} \tag{6}$$

方程(6)就是求解三维Helmholtz方程的高阶隐式紧致差分格式，记为HOIC。由推导过程可知其截断误差为$O(h_x^4+h_y^4+h_z^4)$，其中关于未知量的二阶导数可由(2),(3)和(4)式给出，由于其值在边界点处是未知的，因此，为了保持格式的整体精度达到四阶，利用文献[7]给出其在边界点处的同阶离散格式。如二阶导数在$x$方向左右边界点处的离散格式为

$$(u_{xx})_{0,j,k}=\frac{1}{60h_x^2}\big(225u_{0,j,k}-770u_{1,j,k}+1070u_{2,j,k}-780u_{3,j,k}+305u_{4,j,k}-50u_{5,j,k}\big), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(u_{xx})_{N_x,j,k}=\frac{1}{60h_x^2}\big(&225u_{N_x,j,k}-770u_{N_x-1,j,k}+1070u_{N_x-2,j,k}-780u_{N_x-3,j,k} \\ &+305u_{N_x-4,j,k}-50u_{N_x-5,j,k}\big),\end{aligned} \tag{8}$$

二阶导数在$y$方向和$z$方向上边界点处的离散格式可类似给出。

## 3 Richardson 外推法

本文的计算空间包括三部分，分别是 $D^4_{h_x,h_y,h_z}$，$D^4_{2h_x,2h_y,2h_z}$ 和 $D^6_{h_x,h_y,h_z}$。$D^4_{h_x,h_y,h_z}$ 表示细网格截断误差为 $O(h_x^4+h_y^4+h_z^4)$ 的解空间，$D^4_{2h_x,2h_y,2h_z}$ 表示粗网格截断误差为 $O((2h_x)^4+(2h_y)^4+(2h_z)^4)$ 的解空间，$D^6_{h_x,h_y,h_z}$ 表示细网格截断误差为 $O(h_x^6+h_y^6+h_z^6)$ 的解空间。

对四阶紧致差分格式，Richardson 外推法的计算公式为

$$\tilde{u}^{2h}_{i,j,k}=\frac{16u^h_{2i,2j,2k}-u^{2h}_{i,j,k}}{15},\quad 0\le i,j,k\le N/2. \tag{9}$$

为了书写方便，用 $D^4_h$ 代表 $D^4_{h_x,h_y,h_z}$，$D^4_{2h}$ 代表 $D^4_{2h_x,2h_y,2h_z}$，$D^6_h$ 代表 $D^6_{h_x,h_y,h_z}$，也就是说在实际计算中并不要求网格是等距的，可以是非等距网格。具体算法描述如下：

1) 赋初值 $u^h_{i,j,k}\in D^4_h$，$u^{2h}_{i,j,k}\in D^4_{2h}$ 和 $\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$，并给出误差控制收敛准则 eps；

2) 利用初值 $u^h_{i,j,k}\in D^4_h$，求细网格上未知量及其二阶导数的四阶精度解，即 $(u_{xx})^h$，$(u_{yy})^h$，$(u_{zz})^h$ 和 $u^h\in D^4_h$。

(a) 求解 (2), (7) 和 (8) 三式中系数矩阵为 $(N_x-1)\times(N_x-1)$ 的三对角线性方程组，求得 $(u_{xx})^h\in D^4_h$；

(b) 同样方法求得 $(u_{yy})^h\in D^4_h$ 和 $(u_{zz})^h\in D^4_h$；

(c) 通过方程 (6) 可得 (10) 式，用于求解 $D^4_h$ 上 $x$ 方向 $u^h$ 的值，只需求解 (10) 式 $x$ 方向上形成的 $(N_x-1)\times(N_x-1)$ 的三对角线型方程组

$$\begin{aligned}&\frac{6}{5h_x^2}\left(u^h_{i+1,j,k}+u^h_{i-1,j,k}\right)+\left(\kappa^2-\frac{12}{5h_x^2}-\frac{12}{5h_y^2}-\frac{12}{5h_z^2}\right)u^h_{i,j,k}\\
=&\ \frac{1}{10}\left[(u_{xx})^h_{i+1,j,k}+(u_{xx})^h_{i-1,j,k}+(u_{yy})^h_{i,j+1,k}+(u_{yy})^h_{i,j-1,k}+(u_{zz})^h_{i,j,k+1}+(u_{zz})^h_{i,j,k-1}\right]\\
&+f_{i,j,k}-\frac{6}{5h_y^2}\left(u^h_{i,j+1,k}+u^h_{i,j-1,k}\right)-\frac{6}{5h_z^2}\left(u^h_{i,j,k+1}+u^h_{i,j,k-1}\right),\\
&\quad i=1,2,\cdots,(N_x-1),\quad j=1,2,\cdots,(N_y-1),\quad k=1,2,\cdots,(N_z-1).\end{aligned} \tag{10}$$

3) 利用初始值 $u^{2h}_{i,j,k}\in D^4_{2h}$ 可以求得粗网格上未知量及其二阶导数的四阶精度解，即 $(u_{xx})^{2h}$，$(u_{yy})^{2h}$，$(u_{zz})^{2h}$ 和 $u^{2h}\in D^4_{2h}$。步骤同 2)；

4) 利用 $(u_{xx})^h$，$(u_{yy})^h$，$(u_{zz})^h\in D^4_h$ 和 $(u_{xx})^{2h}$，$(u_{yy})^{2h}$，$(u_{zz})^{2h}\in D^4_{2h}$ 及 $\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$ 求 $(\tilde{u}_{xx})^h$，$(\tilde{u}_{yy})^h$，$(\tilde{u}_{zz})^h\in D^6_h$。

(a) 利用 $(u_{xx})^h_{2i,2j,2k}\in D^4_h$，$(u_{xx})^{2h}_{i,j,k}\in D^4_{2h}$ 和 Richardson 外推，求得 $(\tilde{u}_{xx})^h_{2i,2j,2k}\in D^6_h$；

(b) 利用 $(\tilde{u}_{xx})^h_{2i,2j,2k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$ 和 (2) 式，由算子插值法，得 $(\tilde{u}_{xx})^h_{2i-1,2j,2k}\in D^6_h$；

(c) 利用 $\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$，$(\tilde{u}_{xx})^h_{0,2j-1,2k}\in D^6_h$，$(\tilde{u}_{xx})^h_{N_x,2j-1,2k}\in D^6_h$ 和 (2) 式，由算子插值法，得 $(\tilde{u}_{xx})^h_{i,2j-1,2k}\in D^6_h$，其中 $(\tilde{u}_{xx})^h_{0,2j-1,2k}\in D^6_h$ 和 $(\tilde{u}_{xx})^h_{N_x,2j-1,2k}\in D^6_h$，采用文献 [7] 对

二阶导数的六阶逼近式。

$$(\tilde{u}_{xx})_{0,j,k}=\frac{1}{h_x^2}\Big(\frac{469}{90}u_{0,j,k}-\frac{223}{10}u_{1,j,k}+\frac{879}{20}u_{2,j,k}-\frac{949}{18}u_{3,j,k}$$
$$+41u_{4,j,k}-\frac{201}{10}u_{5,j,k}+\frac{1019}{180}u_{6,j,k}-\frac{7}{10}u_{7,j,k}\Big),\tag{11}$$
$$(\tilde{u}_{xx})_{N_x,j,k}=\frac{1}{h_x^2}\Big(\frac{469}{90}u_{N_x,j,k}-\frac{223}{10}u_{N_x-1,j,k}+\frac{879}{20}u_{N_x-2,j,k}-\frac{949}{18}u_{N_x-3,j,k}$$
$$+41u_{N_x-4,j,k}-\frac{201}{10}u_{N_x-5,j,k}+\frac{1019}{180}u_{N_x-6,j,k}-\frac{7}{10}u_{N_x-7,j,k}\Big).\tag{12}$$

(d) 利用

$$\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h,\quad (\tilde{u}_{xx})^h_{0,j,2k-1}\in D^6_h,\quad (\tilde{u}_{xx})^h_{N_x,j,2k-1}\in D^6_h,$$

和 (2) 式，可以求得 $(\tilde{u}_{xx})^h_{i,j,2k-1}\in D^6_h$，其中 $(\tilde{u}_{xx})^h_{0,j,2k-1}\in D^6_h$ 和 $(\tilde{u}_{xx})^h_{N_x,j,2k-1}\in D^6_h$ 采用文献 [7] 对二阶导数的六阶逼近式 (11) 和 (12) 式；

(e) 同样方法求得 $(\tilde{u}_{yy})^h_{i,j,k}\in D^6_h$ 和 $(\tilde{u}_{zz})^h_{i,j,k}\in D^6_h$；

5) 利用 $u^h_{i,j,k}\in D^4_h$，$u^{2h}_{i,j,k}\in D^4_{2h}$，$(\tilde{u}_{xx})^h$，$(\tilde{u}_{yy})^h$ 和 $\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$ 求细网格上 $\tilde{u}^h$ 的六阶精度解，即 $\tilde{u}^h\in D^6_h$。

(a) 利用 $u^h_{2i,2j,2k}\in D^4_h$ 和 $u^{2h}_{i,j,k}\in D^4_{2h}$，应用 Richardson 外推法，求得 $\tilde{u}^h_{2i,2j,2k}\in D^6_h$；

(b) 利用 $(\tilde{u}_{xx})^h$，$(\tilde{u}_{yy})^h$，$(\tilde{u}_{zz})^h$，$\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{2i,2j,2k}\in D^6_h$ 和 (13) 式，应用算子插值法，求得 $\tilde{u}^h_{2i-1,2j,2k}\in D^6_h$：

$$\frac{6}{5h_x^2}\big(\tilde{u}^h_{i+1,j,k}+\tilde{u}^h_{i-1,j,k}\big)+\Big(\kappa^2-\frac{12}{5h_x^2}-\frac{12}{5h_y^2}-\frac{12}{5h_z^2}\Big)\tilde{u}^h_{i,j,k}$$
$$=\frac{1}{10}\big[(\tilde{u}_{xx})^h_{i+1,j,k}+(\tilde{u}_{xx})^h_{i-1,j,k}+(\tilde{u}_{yy})^h_{i,j+1,k}+(\tilde{u}_{yy})^h_{i,j-1,k}+(\tilde{u}_{zz})^h_{i,j,k+1}+(\tilde{u}_{zz})^h_{i,j,k-1}\big]$$
$$+f_{i,j,k}-\frac{6}{5h_y^2}\big(u^h_{i,j+1,k}+u^h_{i,j-1,k}\big)-\frac{6}{5h_z^2}\big(u^h_{i,j,k+1}+u^h_{i,j,k-1}\big),$$
$$k=2,4,\cdots,(N_z-2),\quad j=2,4,\cdots,(N_y-2),\quad i=1,3,\cdots,(N_x-1);\tag{13}$$

(c) 利用 $(\tilde{u}_{xx})^h$，$(\tilde{u}_{yy})^h$，$(\tilde{u}_{zz})^h$，$\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{2i,2j,2k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{2i-1,2j,2k}\in D^6_h$ 和 (6) 式，同样方法求得 $\tilde{u}^h_{i,2j-1,2k}\in D^6_h$；

(d) 利用 $(\tilde{u}_{xx})^h$，$(\tilde{u}_{yy})^h$，$(\tilde{u}_{zz})^h$，$\tilde{u}^h_{i,j,k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{2i,2j,2k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{2i-1,2j,2k}\in D^6_h$，$\tilde{u}^h_{i,2j-1,2k}\in D^6_h$ 和 (6) 式，同样方法求得 $\tilde{u}^h_{i,j,2k-1}\in D^6_h$；

6) 收敛性判断：如果 $\mathrm{error}(u)\geq \mathrm{eps}$，即 $\tilde{u}$ 两次迭代的误差大于等于 eps，转到步 2)；

7) 输出结果，停止程序运行。

## 4 数值实验

在立方体空间 $0\leq x,y,z\leq 1$ 内，考察三维 Helmholtz 方程如下两个有精确解的问题。本文将构造的基于 Richardson 外推法的 Helmholtz 方程的高阶隐式紧致差分格式记为 RHOIC。

**问题 1** $u(x,y,z)=\sin(x)\sin(2y)\sin(3z)$。

**问题 2** $u(x,y,z)=x^2y^2z^2\mathrm{e}^{x+y+z}$。

表1至表4分别给出了 $\kappa = 1.6$, $\kappa = 3.2$ 和网格等分数 $N = 16, 32, 64$ 时，问题1和问题2采用中心差分格式(CDS)、四阶紧致格式(FOC)[3] 及本文格式RHOIC数值计算结果的最大误差 $\|e\|_\infty$、均方根误差 $\|e\|_2$ 以及收敛阶rate的比较，其中FOC格式是文献[3]二维方法向三维的直接推广。

由计算结果可以看出，对于两个问题，本文格式RHOIC达到了六阶精度，对问题1和问题2，本文格式RHOIC的精确性高于FOC格式，并且本文格式RHOIC的精度明显高于中心差分格式。虽然本文没有列出CDS格式 $h = 1/256$ 时的数值解，但是本文格式RHOIC在粗网格 $h = 1/16$ 下的精确度仍高于CDS格式在精细网格 $h = 1/256$ 下的结果。例如对问题1，当 $\kappa = 1.6$ 时，本文格式RHOIC在粗网格 $h = 1/16$ 下的最大误差为 $6.81 \times 10^{-6}$，而CDS格式在精细网格 $h = 1/256$ 下的最大误差为 $1.38 \times 10^{-5}$。

表1: 问题1三种格式在 $\kappa = 1.6$ 时的误差和收敛阶的比较

| $N$ | CDS格式 | | | FOC格式[3] | | | RHOIC格式 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate |
| 16 | 3.53(-3) | 1.25(-3) | | 1.56(-5) | 5.62(-6) | | 6.81(-6) | 4.45(-6) | |
| 32 | 8.80(-4) | 3.11(-4) | 2.00 | 9.90(-7) | 3.50(-7) | 3.98 | 7.63(-8) | 8.11(-8) | 6.48 |
| 64 | 2.20(-4) | 7.77(-5) | 2.00 | 6.81(-8) | 2.91(-8) | 4.00 | 7.71(-10) | 1.32(-9) | 6.63 |

表2: 问题1三种格式在 $\kappa = 3.2$ 时的误差和收敛阶的比较

| $N$ | CDS格式 | | | FOC格式[3] | | | RHOIC格式 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate |
| 16 | 4.93(-3) | 1.74(-3) | | 2.22(-5) | 7.84(-6) | | 7.34(-6) | 6.07(-6) | |
| 32 | 1.23(-3) | 4.35(-3) | 2.00 | 1.38(-6) | 4.89(-7) | 4.00 | 7.78(-8) | 1.03(-8) | 6.56 |
| 64 | 3.07(-4) | 1.09(-4) | 2.00 | 8.63(-8) | 3.05(-8) | 4.00 | 7.82(-10) | 1.61(-10) | 6.64 |

表3: 问题2三种格式在 $\kappa = 1.6$ 时的误差和收敛阶的比较

| $N$ | CDS格式 | | | FOC格式[3] | | | RHOIC格式 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate |
| 16 | 1.18(-3) | 3.27(-4) | | 7.47(-6) | 2.43(-6) | | 6.39(-8) | 6.84(-8) | |
| 32 | 3.05(-4) | 8.29(-4) | 1.95 | 4.68(-7) | 1.52(-7) | 4.00 | 1.53(-9) | 3.21(-9) | 5.38 |
| 64 | 7.65(-5) | 2.08(-5) | 1.99 | 2.93(-8) | 9.53(-9) | 4.00 | 3.21(-11) | 1.12(-10) | 5.61 |

表 4: 问题 2 三种格式在 $\kappa = 3.2$ 时的误差和收敛阶的比较

| $N$ | CDS 格式 | | | FOC 格式[3] | | | RHOIC 格式 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate | $\|e\|_\infty$ | $\|e\|_2$ | rate |
| 16 | 1.40(-3) | 4.22(-4) | | 9.21(-6) | 3.22(-6) | | 6.88(-8) | 9.90(-8) | |
| 32 | 3.54(-4) | 1.07(-4) | 1.98 | 5.77(-7) | 2.02(-7) | 4.00 | 1.52(-9) | 4.22(-9) | 5.50 |
| 64 | 8.87(-5) | 2.68(-5) | 2.00 | 3.61(-8) | 1.26(-8) | 4.00 | 2.92(-11) | 1.51(-10) | 5.70 |

## 参考文献:


[1] Bayliss S, Goldstein C I, Turkel E. An interative method for the Helmholtz equation[J]. J Comput Phys, 1983, 49: 443-457

[2] Bayliss S, Goldstein C I, Turkel E. Preconditioned conjugate gradient methods for the Helmholtz equation[J]. Elliptic Problem Solvers II, 1984: 233-243

[3] Manohar R P, Stephenson J W. Single cell high order difference methods for the Helmholtz equation[J]. J Comput Phys, 1983, 51: 444-453

[4] Singer I, Turkel E. High-order finite difference methods for the Helmholtz equation[J]. Cumput Meth Appl Mech Engrg, 1998, 163: 343-358

[5] Steij1 R, Hoeijmakers H W M. Fourth-order accurate compact-difference discretization method for Helmholtz and incompressible Navier-Stokes equations[J]. Int J Numer Meth Fluids, 2004, 46: 227-244

[6] 王前东，程攀，吕涛. 变系数 Helmholtz 方程的六阶校正法[J]. 四川大学学报 (自然科学版)，2004, 41(1): 33-39
Wang Q D, Cheng P, Lv T. Six-order correction method of the Helmholtz equation with variable coefficients[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2004, 41(1): 33-39

[7] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. J Comput Phys, 1992, 103: 16-29


# High-order Implicit Compact Difference Scheme for Solving the Three-dimensional Helmholtz Equation


GE Yong-bin[1], LIU Guo-tao[2]

(1- Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Ningxia University, Yinchuan 750021;
2- The 46st Institute of the sixth Academy of CASIC, Hohhot 010010)



**Abstract:** Based on the Padé scheme of second-order partial derivatives and combined with the original differential equation, a fourth-order implicit compact difference scheme is proposed for solving the three-dimensional Helmholtz equation. Only three points and their second-order derivative values are needed on each spacial direction. The fourth-order explicit difference schemes are used to construct the same order discretization of boundary conditions. Then, the accuracy of the fourth-order implicit compact difference scheme is upgraded to sixth-order by using the Richardson extrapolation technique and operator interpolation scheme. The sixth-order explicit difference schemes of second-order partial derivatives on the boundaries are also used. Finally, numerical experiments are given to prove the efficiency and reliability of the present method.



**Keywords:** Helmholta equation; high accuracy; implicit; compact difference scheme; Richardson extrapolation

**Received:** 31 Dec 2008. **Accepted:** 25 May 2009.

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (10502026); the Natural Science Foundation of Ningxia (NZ0937).